

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ивановский Л.И., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-39-50

УДК 517.938



Динамические свойства одной импульсной задачи Коши

Леонид Игоревич ИВАНОВСКИЙ

ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»

150003, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Советская, 14

Аннотация. Рассматривается модель полностью связанной ассоциации нейронов с синаптической электрической связью, представляющая собой систему m дифференциальных уравнений с запаздыванием. Специальной заменой эта система приводится к системе импульсных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для соответствующей динамической системы в случае $m = 3$ изучаются вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений на основании бифуркационного анализа двумерного отображения — оператора сдвига по траекториям решения специальной системы двух дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется числу сосуществующих устойчивых режимов. Исследуется задача нахождения параметров, для которых количество таких режимов максимально. Для поиска неподвижных точек полученного двумерного отображения используется численное исследование, основанное на следующей итерационной процедуре. Выбирается начальная точка, методом Рунге–Кутты с заданным шагом вычисляются значения решения на отрезке $[0, T]$, в конечной точке T этого отрезка значение решения сравнивается с начальным и, если отклонение превышает заданное значение, то значение в конечной точке принимается за начальное и цикл вычислений методом Рунге–Кутты повторяется. Вычисления заканчиваются, если достигнуто требуемое малое отклонение, т. е. найдена неподвижная точка оператора сдвига, и соответствующий устойчивый периодический режим, или если количество итераций достигает заданного большого числа, что свидетельствует об отсутствии неподвижной точки. В работе представлены результаты проведенного численного исследования, позволившего продемонстрировать основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве двумерного отображения. Полученные неподвижные точки позволяют найти асимптотические устойчивые решения исходной задачи.

Ключевые слова: модель полностью связанной ассоциации нейронов, фазовые портреты, устойчивые режимы, бифуркации

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>).

Для цитирования: *Ивановский Л.И.* Динамические свойства одной импульсной задачи Коши // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 39–50. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-39-50.

Dynamic properties of one impulse Cauchy problem

Leonid I. IVANOVSKY

P. G. Demidov Yaroslavl State University

14 Sovetskaya St., Yaroslavl 150003, Russian Federation

Abstract. A model of a fully connected association of neurons with a synaptic electrical connection which is a system of m differential equations with delay is considered. By a special substitution, this system is reduced to a system of impulsive ordinary differential equations. For the corresponding dynamical system in the case $m = 3$, we study the existence, stability, and asymptotic representation of periodic solutions on the basis of a bifurcation analysis of a two-dimensional mapping, a shift operator along trajectories of a solution to a special system of two differential equations. Particular attention is paid to the number of coexisting stable regimes. We study the problem of finding parameters for which the number of such modes is maximum. In order to search the fixed points of the resulting two-dimensional mapping, a numerical study is used based on the following iterative procedure. Selected the starting point, the Runge-Kutta method with a given step calculates the solution values on the segment $[0, T]$. At the end point T of this segment, the solution value is compared with the initial one and if the deviation exceeds the specified value, then the value at the end point is taken as the initial one and the calculation cycle by the Runge-Kutta method is repeated. The calculations terminate when the required small deviation is reached, i.e., a fixed point of the shift operator is found, and so is the corresponding stable periodic mode, or when the number of iterations reaches a given large number, and this indicates the absence of a fixed point. The paper presents the results of a numerical study that made it possible to demonstrate the main rearrangements occurring in the phase space of a two-dimensional mapping. The obtained fixed points allow us to find asymptotic stable solutions of the original problem.

Keywords: model of a fully connected association of neurons, phase portraits, stable regimes, bifurcations

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00209, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00209/>).

Mathematics Subject Classification: 34D05, 34D20, 65L06, 65L11.

For citation: Ivanovsky L.I. Dynamic properties of one impulse Cauchy problem. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 39–50. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-39-50. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение

Рассмотрим математическую модель функционирования отдельного нейрона, представляющую собой скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение вида (см. [1])

$$\dot{u} = \lambda(-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u))u, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Будем полагать $u(\tau) = \varphi(\tau)$ при $\tau \in [-1, 0]$, где $\varphi \in C[-1, 0]$ — заданная начальная функция. Для параметров λ (характеризующего скорость протекания электрических процессов), α и β выполняются следующие условия:

$$\lambda \gg 1, \quad \beta > 0, \quad \alpha > 1 + \beta. \quad (1.2)$$

Гладкие функции $f(u), g(u)$ будем считать принадлежащими классу $C^2(\mathbb{R}_+)$. Эти функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) = g(0) = 1; \quad 0 < \beta g(u) < \alpha \quad \forall u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), u f'(u), u g'(u), u^2 f''(u), u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнение (1.1) называют модифицированным логистическим уравнением. В статьях [2–4] было показано, что это уравнение при всех $\lambda \gg 1$ допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u_*(t, \lambda) > 0, \quad u_*(0, \lambda) \equiv 1 \quad (1.4)$$

периода $T_*(\lambda)$, удовлетворяющего предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1), \quad (1.5)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T_*(\lambda)} |x_*(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

в которых величина T_0 составляет главную часть периода устойчивого цикла (1.4), функция x_* задается равенством $x_*(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln u_*(t, \lambda)$, а x_0 — T_0 -периодическая функция, определяемая формулой

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha - 1)t, & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha - t, & \text{при } 1 \leq t \leq \alpha, \\ -(1 + \beta)(t - \alpha), & \text{при } \alpha \leq t \leq \alpha + 1, \\ (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta, & \text{при } \alpha + 1 \leq t \leq T_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Предположим, что имеется сеть из $m \geq 2$ нейронов с мембранными потенциалами $u_j = u_j(t) > 0$, $j = \overline{1, m}$, каждый из которых взаимодействует с любым другим. Согласно [5, с. 60–65] связь между нейронами с номерами j и s , $j \neq s$ осуществляется посредством тока проводимости $I_{j,s}^{syn}$, который в силу закона Ома задается равенством

$$I_{j,s}^{syn} = d(u_s - u_j), \quad d > 0. \quad (1.7)$$

Одна из возможных моделей полносвязной ассоциации электрических синапсов, основанная на модели из статьи [6], может быть представлена системой вида

$$\dot{u}_j = d \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m (u_s - u_j) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

В статье [6] была приведена модификация данной системы, заключающаяся в замене выражения (1.7) для тока проводимости соотношением

$$I_{j,s}^{syn} = \sigma \left(\frac{u_s}{u_j} \right), \quad d > 0,$$

где функция связи $\sigma(u) \in C^3(\mathbb{R}_+)$, ограничивающая значения переменных u_j , удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{aligned} \sigma(u) < 0 \quad \text{при} \quad u \in [0, 1), \quad \sigma(0) = -1, \\ \sigma(u) > 0 \quad \text{при} \quad u > 1, \quad \sigma(1) = 0, \quad \sigma'(1) > 0, \\ \sigma(u) - \delta, u\sigma'(u), u^2\sigma''(u), u^3\sigma'''(u) = O(1/u) \quad \text{при} \quad u \rightarrow +\infty, \quad \delta = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Что же касается модели соответствующей ассоциации нейронов с синаптической электрической связью, то в данном случае она приобретает вид

$$\dot{u}_j = d \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \sigma \left(\frac{u_s}{u_j} \right) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.9)$$

В [6] отмечены два отличия приведенного подхода к моделированию электрических синапсов от общепринятого. Во-первых при переходе от отдельного нейрона к соответствующей сети сохраняется вольтерровская структура уравнений, а во-вторых, соблюден так называемый «закон насыщающих проводимостей», который заключается в выполнении условий (1.3), (1.8) для нелинейных функций. Тем самым, модели отдельного нейрона (1.1) и нейронной сети (1.9) базируются на одних и тех же принципах, сформулированных в работе [1]. Отметим, что под вольтерровской структурой уравнений (1.9) здесь подразумевается возможность записи их правых частей в виде произведения соответствующей зависимой переменной и некоторой неособой в нуле функции, что позволяет гарантировать положительность решений с положительными начальными условиями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим предложенную в статье [6] ассоциацию сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием (1.9), моделирующую электрическое взаимодействие нейронов по принципу «каждый с каждым». Для параметров λ, α, β этой системы полагаем, что выполнены условия (1.2), а для гладких функций $f, g \in C^2(\mathbb{R}_+)$ — условия (1.3).

В качестве конкретного примера функции связи, удовлетворяющей требованиям (1.8), выберем (см. [6])

$$\sigma(u) = \frac{\delta(u-1)}{u+\delta}, \quad \delta \in (0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty).$$

В силу равенства $\sigma(1) = 0$ система (1.9) допускает так называемый однородный цикл

$$u_1 \equiv u_2 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \quad (2.1)$$

где $u_*(t, \lambda)$ — устойчивое периодическое решение уравнения (1.1) периода $T_*(\lambda)$, удовлетворяющего предельному соотношению (1.5). В статье [6] показано, что периодическое

решение $u_*(t, \lambda)$ с периодом $T_*(\lambda)$ асимптотически близко при $\lambda \gg 1$ к величине $e^{\lambda x_0(t)}$, где $x_0(t)$ — T_0 -периодическая функция, которая задается равенствами (1.6).

Не проводя исследования всех периодических режимов системы (1.9), ограничимся рассмотрением лишь тех из них, которые располагаются в некоторой окрестности однородного цикла (2.1). При нахождении таких режимов можно применить специальные асимптотические методы, разработанные и примененные в статьях [1–4, 7, 8] для аналогичных (1.9) систем из трех осцилляторов вида (см. [9–14])

$$\dot{u}_j = d(a_1 u_{j-1} - a_2 u_j + u_{j+1}) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

с различными значениями параметров a_1, a_2 и следующими краевыми условиями на u_0, u_4 :

- а) $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$;
- б) $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$ (цепочка и кольцо диффузионно связанных осцилляторов);
- в) $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$ (кольцо однонаправленно связанных осцилляторов).

В системе (1.9) выполним замены

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = \overline{2, m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1, \quad (2.3)$$

где x, y_1, \dots, y_{m-1} — новые переменные (такие же замены производились в [3, 4] для системы (2.2)). В результате такой замены систему (1.9) можно свести к системе

$$\dot{x} = \varepsilon d \sum_{s=2}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=1}^{s-1} y_r\right)\right) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d \sum_{s=1}^j \sigma\left(\exp\left(-\sum_{r=s}^j y_r\right)\right) + d \sum_{s=j+2}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=j+1}^{s-1} y_r\right)\right) \\ &\quad - d \sum_{s=1}^{j-1} \sigma\left(\exp\left(-\sum_{r=s}^{j-1} y_r\right)\right) - d \sum_{s=j+1}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=j}^{s-1} y_r\right)\right) \\ &\quad + G_j(x, x(t-1), y_1, \dots, y_j, y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \quad j = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

для которой функции F, G задаются равенствами

$$F(x, u, \varepsilon) = -1 + \alpha f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) - \beta g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$\begin{aligned} G_j(x, u, y_1, \dots, y_j, v_1, \dots, v_j, \varepsilon) &= \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j v_k\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} v_k\right)\right) \right] \\ &\quad + \frac{\beta}{\varepsilon} \left[g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) - g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j y_k\right)\right) \right], \quad j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим данную задачу в случае трех осцилляторов ($m = 3$). Зафиксируем $\sigma_0 \in (0, \min \{1, (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1)\})$ и обозначим через $y_1^0(t, z)$, $y_2^0(t, z)$ (где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$) компоненты решения следующей импульсной задачи Коши (см. [4])

$$\begin{cases} y_1 = d(\sigma(e^{-y_1}) - \sigma(e^{y_1}) + \sigma(e^{y_2}) - \sigma(e^{y_1+y_2})), \\ y_2 = d(\sigma(e^{-y_2}) - \sigma(e^{y_2}) + \sigma(e^{-y_1}) - \sigma(e^{-y_1-y_2})). \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} y_j(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0), \\ y_j(\alpha+0) &= (1 + \beta) y_j(\alpha - 0), \\ y_j(\alpha + 1 + 0) &= y_j(\alpha + 1 - 0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha + 0), \quad j = 1, 2. \\ (y_1, y_2)|_{t=-0} &= z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим оператор сдвига за время от 0 до T_0 по траекториям дифференциальной импульсной системы (2.6), (2.7)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \Phi(z) = \begin{pmatrix} y_1^0(T_0, z) \\ y_2^0(T_0, z) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

Для отображения (2.8) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1 (см. [6, теорема 1]). *Любой гиперболической неподвижной точке $z = z_*$ отображения (2.8) в системе (2.4), (2.5) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл*

$$(x(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{m-1}(t, \varepsilon)), \quad x(0, \varepsilon) \equiv 0$$

периода $T(\varepsilon)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которого определяются соответствующими многообразиями этой точки. Кроме того, справедливы соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T_0, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |x(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_j^0(t, \varepsilon) - y_j^0(t, z_*)| = 0, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |y_j(t, \varepsilon)| \leq M, \quad j = \overline{1, m-1},$$

где $x_0(t)$ — функция, определяемая по формуле (1.6), $M = \text{const} > 0$, а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T_0 + \sigma_0]$ с выброшенными интервалами $(1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha - \varepsilon^\delta, \alpha + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha + 1 - \varepsilon^\delta, \alpha + 1 + \varepsilon^\delta)$, где $\delta = \text{const} \in (0, 1)$.

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в аналогичных ситуациях оно подробно изложено в статьях [3, 7]. Из теоремы следует, что для того, чтобы говорить об устойчивых циклах системы (1.9) и системы (2.6), (2.7) соответственно, достаточно изучить неподвижные точки отображения (2.8). Они и являлись объектами исследования.

Асимптотический анализ отображения (2.8), выполненный в статье [6], позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра d оно совпадает с оператором сдвига за время $t = 1$ по траекториям системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{z}_1}{dt} = 2 - \frac{C \exp \tilde{z}_1}{1 + \exp \tilde{z}_1}, \quad \frac{d\tilde{z}_2}{dt} = \frac{C \exp(-\tilde{z}_2)}{1 + \exp \tilde{z}_2} - 2,$$

где C — константа, зависящая от значений параметров α , β . Исходя из этого, отображение (2.8) имеет только одно устойчивое состояние равновесия $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$. При этом нулевое состояние равновесия устойчиво для любых значений d . Ему соответствует однородный цикл системы (1.9).

Задача исследования состояла в определении таких значений параметров α и β , при которых отображение (2.8) имеет наибольшее число устойчивых неподвижных точек. Также изучались вопросы фазовых перестроек, происходящих в фазовом пространстве отображения (2.8). Поскольку описать динамические свойства отображения (2.8) в полной мере с использованием одного лишь аналитического аппарата затруднительно, исследование осуществлялось на основе сочетания аналитических методов и численных экспериментов. В зависимости от различных значений начальных параметров изучались вопросы существования и устойчивости релаксационных периодических решений. В процессе исследования, особое внимание уделялось числу сосуществующих устойчивых режимов отображения (2.8).

3. Поиск неподвижной точки релаксационного отображения

Расчет координат неподвижных точек отображения (2.8) выполняется следующим образом: вычисления начинаются из точек вида $(y_1(-0), y_2(-0))^T$, координаты которых представляют собой начальные условия системы (2.6), (2.7). Начальным моментом времени здесь считается величина $t = -0$. Стартовые точки отображения (2.8) варьировались по ходу проведения численных исследований, оставаясь при этом в окрестности нулевого состояния равновесия.

Для каждой начальной точки отображения (2.8), итерационно, с фиксированным шагом h , при помощи метода Рунге–Кутты подсчитывались координаты следующей точки. Этот метод имеет четвертый порядок точности, т. е. ошибка на каждом интервале подсчета будет иметь порядок $O(h^5)$. Вычисления такого рода продолжаются до тех пор, пока не будет получена так называемая конечная точка отображения (2.8) в момент времени $t = T_0$. Однако стоит отметить, что для $t = 0, 1, \alpha, \alpha + 1$ в системе (1.9) выполняются условия соответствующего импульсного воздействия. Как следствие, координаты точки в этих случаях подсчитываются по формулам (2.7).

Далее происходит проверка стационарности для каждой полученной конечной точки отображения (2.8). Если ее координаты отличаются от координат начальной точки не более чем на заранее заданное, достаточно малое число, то посчитанное ранее состояние отображения $(y_1(T_0), y_2(T_0))^T$ считается устойчивым. В противном же случае, конечная точка отображения (2.8) считается начальной и для нее осуществляется та же последовательность операций, которая была описана ранее.

Для каждой начальной точки отображения (2.8) расчеты заканчивались при достижении достаточно большого числа описанных выше итераций получения конечной точки отображения (2.8) или при обнаружении неподвижного состояния равновесия.

4. Результаты численного исследования

Расчет неподвижных точек релаксационного отображения (2.8) зависит не только от выбора начальной точки и значений α , β , но также и от величины δ , являющейся параметром функции $\sigma(u)$.

В результате проведенных численных исследований для $\delta \in (2 + \sqrt{3}, +\infty)$ на коорди-

натной плоскости параметров (α, β) были выделены области $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_0\}$, $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_1\}$, границами которых являются прямые $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$, $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$. Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 1.

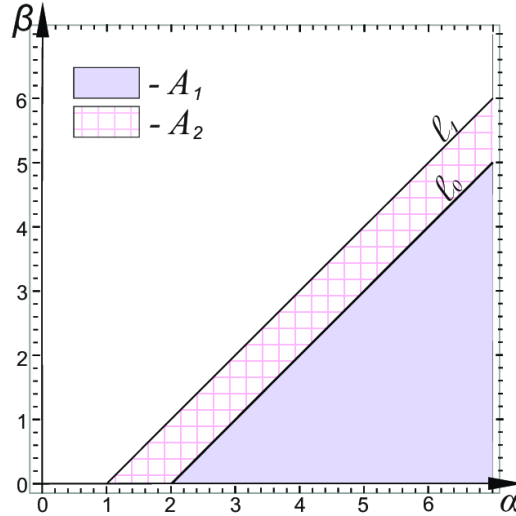


Рис. 1. Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Далее рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей (в статьях [11–14] были продемонстрированы результаты аналогичных исследований для систем вида (2.2) с различными значениями параметров a_1, a_2 и краевыми условиями на u_0, u_4).

Согласно результатам проведенных численных исследований, при изменении параметра d для любых фиксированных значений пары $(\alpha, \beta) \in A_1$ в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для определенности возьмем $\alpha = 3, 6$ и $\beta = 0, 4$. При изменении параметра d для заданных величин α и β получается следующая последовательность бифуркаций:

1. При $d < d_1$; $d_1 \approx 0.025$ отображение (2.8) имеет четыре устойчивые неподвижные точки (S_0, S_1, S_2, S_3) и три неустойчивые (U_0, U_1, U_2). Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 2.

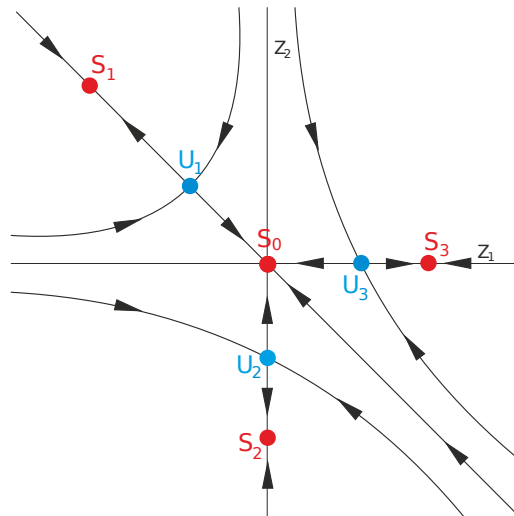


Рис. 2. Фазовый портрет отображений при $d < d_1$

2. При $d = d_1$ устойчивые узлы S_1 , S_2 и S_3 , сливаясь с седлами U_1 , U_2 и U_3 , пропадают. Тем самым, при $d > d_1$ отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние S_0 .

Полученный сценарий фазовых перестроек остается верным для любых $(\alpha, \beta) \in A_1$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра d .

Согласно результатам проведенных численных исследований, при изменении параметра d для любых фиксированных значений пары $(\alpha, \beta) \in A_2$ в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для удобства зафиксируем величины $\alpha = 1,9$ и $\beta = 0,1$ и будем менять значение параметра d . В результате для отображения (2.8) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При $d < d_1$; $d_1 \approx 0,002$ отображение (2.8) имеет четыре устойчивые неподвижные точки (S_0 , S_1 , S_2 , S_3) и три неустойчивые (U_0 , U_1 , U_2). Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 3.

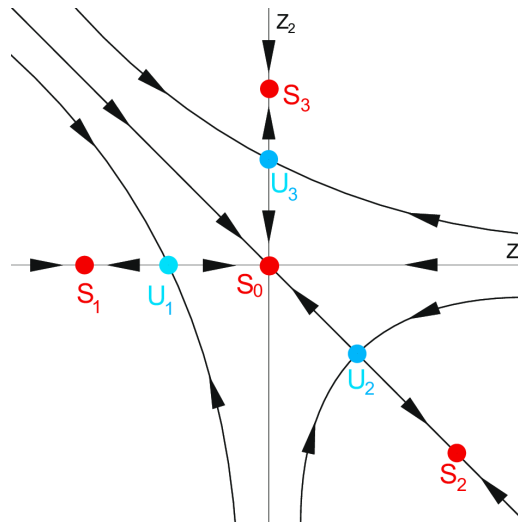


Рис. 3. Фазовый портрет отображений при $d < d_1$

2. При $d = d_1$ устойчивые узлы S_1 , S_2 и S_3 , сливаясь с седлами U_1 , U_2 и U_3 , пропадают. Тем самым, при $d > d_1$ отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние S_0 .

Полученный сценарий фазовых перестроек остается верным для любых $(\alpha, \beta) \in A_2$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра d .

Различия фазовых портретов, представленных на рис. 2 и 3, заключаются лишь в местоположении неустойчивых седел U_1 , U_2 , U_3 , а также устойчивых узлов S_1 , S_2 , S_3 . В связи с этим возник вопрос, как изменяется поведение состояний равновесия при переходе из одной области параметров в другую. В результате численного исследования,

при зафиксированных α и d и изменении значения β , на прямой l_1 обнаруживалось существование двух многообразий: неустойчивого M_U и устойчивого M_S (см. рис. 4).

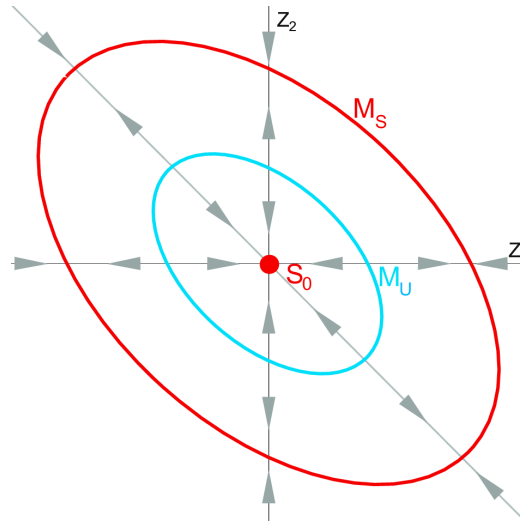


Рис. 4. Фазовый портрет отображения для параметров $(\alpha, \beta) \in l_1$

В том случае, если параметр $\delta \in (0, 2 - \sqrt{3})$, согласно результатам проведенных численных исследований, на координатной плоскости параметров (α, β) также можно выделить области $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_0\}$, $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_1\}$, границами которых являются прямые $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$, $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$. Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 4. Отметим, что выделенные области A_1, A_2 значений параметров (α, β) в точности определяли сценарии аналогичных фазовых портретов, описанных выше.

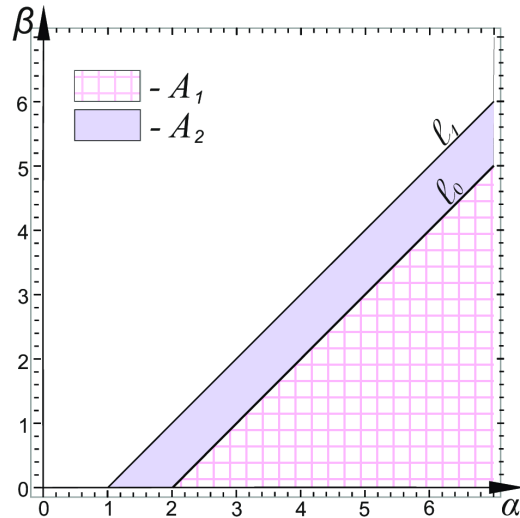


Рис. 4. Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Полученные в результате анализа отображения (2.8) его неподвижные точки позволяют найти асимптотику решений системы (2.6), (2.7). На основе решений импульсной системы (2.6), (2.7), учитывая замену (2.3), получаем асимптотические устойчивые решения исходной задачи (1.9).

5. Заключение

Для полносвязной ассоциации сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, представляющих собой математическую модель импульсной системы, были изучены вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений с помощью бифуркационного анализа специального двумерного отображения, построенного в зависимости от различных значений параметров. Для динамической системы с импульсными воздействиями, полученной в результате преобразований полносвязной ассоциации осцилляторов, на координатной плоскости параметров были выделены области, соответствующие различным бифуркационным сценариям. Благодаря численному исследованию, в каждой из областей были подробно рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве соответствующего двумерного отображения. Также были установлены множества значений начальных параметров, при которых возможно единовременное сосуществование большего числа устойчивых неподвижных точек.

References

- [1] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *Успехи мат. наук*, **70**:3 (2015), 3–76; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Mathematical Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452.
- [2] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941.
- [3] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713.
- [4] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:2 (2012), 155–170; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48**:2 (2012), 159–175.
- [5] С. А. Кащенко, В. В. Майоров, *Модели волновой памяти*, Либроком, М., 2009. [S. A. Kashchenko, V. V. Mayorov, *Modeli Volnovoy Pamyati*, Librokom Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].
- [6] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, “Об одном способе математического моделирования электрических синапсов”, *Дифференциальные уравнения*, **58**:7 (2022), 1–15; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, “On a Method of Mathematical Modeling of Electrical Synapses”, *Differential Equations*, **58**:7 (2022), 853–868.
- [7] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием”, *Успехи мат. наук*, **67**:2 (2012), 109–156; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited wave processes in chains of diffusion-linked delay equations”, *Russian Mathematical Surveys*, **67**:2 (2012), 297–343.
- [8] Д. С. Щапин, В. И. Некоркин, “Параметрически возбуждаемые хаотические спайковые последовательности и информационные аспекты в ансамбле нейронов ФитцХью–Нагумо”, *Письма в Журн. эксп. и теор. физики*, **113**:6 (2021), 415–420; англ. пер.: D. S. Shchapin, V. I. Nekorkin, “Parametrically Excited Chaotic Spike Sequences and Information Aspects in an Ensemble of FitzHugh–Nagumo Neurons”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, **113**:6 (2021), 418–422.
- [9] Л. И. Ивановский, “Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями”, *Динамические системы*, **6**:2 (2016), 113–132. [L. I. Ivanovsky, “Stable modes of dynamical systems with impulses”, *Dynamic Systems*, **6**:2 (2016), 113–132 (In Russian)].

- [10] Л. И. Ивановский, С. О. Самсонов, “Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием”, *Вычисл. техн. в естеств. науках. методы суперкомп. модел.*, **2** (2015), 121–132. [L. I. Ivanovsky, S. O. Samsonov, “Dynamics of two-dimensional mapping and stable regimes of singularly perturbed neuron system”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers*, **2** (2015), 121–132 (In Russian)].
- [11] Л. И. Ивановский, “Динамические свойства одного класса импульсных систем”, *Вычисл. техн. в естеств. науках. методы суперкомп. модел.*, **3** (2015), 126–131. [L. I. Ivanovsky, “Dynamic properties of one class of impulse systems”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers*, **3** (2015), 126–131 (In Russian)].
- [12] Л. И. Ивановский, “Устойчивые режимы одного класса динамических систем с импульсными воздействиями”, *Вычисл. техн. в естеств. науках. методы суперкомп. модел.*, **4** (2017), 35–42. [L. I. Ivanovsky, “Stable regimes of one class of dynamic systems with impulse influences”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers*, **4** (2017), 35–42 (In Russian)].
- [13] Л. И. Ивановский, С. О. Самсонов, “Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием”, *Модел. и анализ. информ. систем*, **21:6** (2014), 179–181. [L. I. Ivanovsky, S. O. Samsonov, “Phase reconstructions of one two-dimensional dynamical system with impulses”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21:6** (2014), 179–181 (In Russian)].
- [14] L. I. Ivanovsky, “Stable regimes of dynamic systems with impulsive influences”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38:5** (2017), 921–925.

Информация об авторе

Ивановский Леонид Игоревич, младший научный сотрудник, Объединенный институт математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль, Российская Федерация. E-mail: leon19unknown@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4717-5129>

Поступила в редакцию 17.11.2022 г.

Поступила после рецензирования 23.02.2023 г.

Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the author

Leonid I. Ivanovsky, Junior Researcher, A. N. Kolmogorov Institute of Mathematics and Computer Science, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation. E-mail: leon19unknown@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4717-5129>

Received 17.11.2022

Reviewed 23.02.2023

Accepted for press 10.03.2023